

## Розробка метрики і методів кількісної оцінки сегментації біомедичних зображень

О. М. Березький, М. М. Зарічний, О. Й. Піцун

*Введено відстань Фреше між деревами та доведено, що ця відстань є метрикою. Розроблено метод і алгоритми визначення відстані між не опуклими областями. Спроектований і програмно реалізований модуль визначення відстані Фреше між скелетонами. Досліджено похибки результатів сегментації для метрик Хаусдорфа та Фреше між деревами на прикладі біомедичних зображень*

*Ключові слова: метрика Фреше, метрика Хаусдорфа, не опуклі області, біомедичні зображення, похибка сегментації*

### 1. Вступ

Цифрова мікроскопія відіграє важливу роль при аналізі біомедичних зображень і постановці діагнозу. Біомедичними зображення будемо називати зображення, які отримані від технічних засобів медичного спрямування для візуалізації процесів. Особливе значення якості цифрових зображень має в онкології. Для постановки діагнозу в онкології використовують зображення окремих клітин (цитологічні зображення) та зображення групи клітин (гістологічні зображення).

Сучасна цифрова мікроскопія у своєму розвитку пройшла шлях від ручних мікроскопів до сучасних роботизованих комплексів.

Для проведення класифікації цифрової мікроскопії введемо такі критерії: автоматизації, програмного забезпечення, використання мережевих технологій.

Згідно першого критерію, розрізняють ручні мікроскопи, з якими автономно працюють лаборанти. Такі мікроскопи найбільш розповсюджені в клініках України. Автоматика автоматизованих мікроскопів контролює переміщення та фокусування препарату, зміну фільтрів, об'єктивів, освітлення [1]. Апаратне забезпечення системи автоматизованої мікроскопії (САМ) складаються із мікроскопа, відеокамери та комп'ютера. Основою програмного забезпечення САМ є системи аналізу зображень (САЗ). Остання сучасна група – це автоматичні (роботизовані) мікроскопи, що дозволяють в автоматичному режимі обробляти зображення. На основі автоматичних мікроскопів проектують сучасні комплекси автоматичної мікроскопії (КАМ) [2, 3].

За рівнем програмного забезпечення розрізняють програмні системи (ПС), які виконують системні функції: управління мікроскопом, відеокамерою тощо. Інший клас ПС – це інформаційні системи, в яких реалізовані бази даних зображень, бази даних пацієнтів, вхідні та вихідні документи звітного характеру. Наступний клас ПС – це системи аналізу зображень, в яких реалізовані алгоритми опрацювання зображень на трьох рівнях – низького, середнього та високо-

го. Окремий клас ПС – це експертні системи, які моделюють роздуми лікаря-експерта при постановці діагнозу. Поєднання ЕС і систем аналізу зображень породили гібридні системи, які поєднують технології баз знань та комп'ютерного зору. Цей напрямок є перспективним на сучасному етапі. Сучасні КАМ мають в своєму складі програми, що забезпечують організацію телемедицини.

За рівнем використання мережевих технологій розрізняють КАМ, що реалізовані на окремих робочих станціях. Таке використання обмежене локальною роботою окремих лаборантів. Інший рівень – це використання КАМ в локальній мережі клініки, лікарні, що дає змогу працювати уже декільком спеціалістам одночасно. Використання КАМ в глобальній мережі INTERNET дозволяє реалізувати технологію телемедицини.

Проаналізовані системи цифрової мікроскопії представлені на ринку і різняться в ціні залежно від комплектації. Наприклад, вартість системи BioVision [4] складає \$1850, ВидеоТест-Морфо-5 [5] – \$3440, МЕКОС-Ц2 [6] – \$12208.

Основну частину вартості таких систем складає програмне забезпечення.

Основу всіх САМ і КАМ становлять САЗ. САЗ включають в себе всі рівні опрацювання зображень: низький, середній та високий. Низький рівень служить для покращення якості зображень і містить алгоритми фільтрації, вирівнювання гістограм зображень, покращення контрастності тощо. Середній рівень проводить операції сегментації, виділення контурів зображень, обчислення контурних і текстурних ознак. Високий рівень проводить класифікацію мікрооб'єктів на основі ознак [7, 8].

Основною операцією на середньому рівні є сегментація. Від точності сегментованих об'єктів залежать наступні розрахунки кількісних ознак. На сьогодні не існує універсального алгоритму сегментації зображень. Кожен алгоритм орієнтований на певну предметну область. Тому оцінка якості результатів сегментації має важливе значення. Для оцінки якості сегментації використовують об'єктивні та суб'єктивні критерії. У роботі наведено класифікацію критеріїв оцінки сегментації [9].

Суб'єктивна оцінка робиться людиною та ґрунтується на якісних показниках. Об'єктивна оцінка базується на кількісних показниках. Перевагою застосування кількісних показників для оцінки сегментації є відсутність людського фактору. Найбільшу точність оцінки сегментації мають методи, які базуються на використанні метрик.

Тому актуальним напрямом кількісної оцінки якості сегментації зображень є підхід, який базується на використанні метрик Фреше та Хаусдорфа [10].

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Проаналізуємо сучасні алгоритми обчислення відстаней Хаусдорфа та Фреше. Алгоритми для обчислення відстані Хаусдорфа розроблено тільки для опуклих полігонів. У статті [11] розроблено алгоритм для зменшення кількості вершин опуклого полігону для заданої похибки  $\xi$  в метриці Хаусдорфа. Алгоритм використовується тільки для опуклих полігонів. У статті [12] обчислюють відстань Хаусдорфа між алгебраїчними плоскими кривими з використанням

діаграм Вороного. Алгоритм використовується для часткових випадків алгебраїчних кривих і мають високу обчислювальну складність. Алгоритм для знаходження мінімальної відстані Хаусдорфа в метриках  $L_i$  та  $L_\infty$  наведено у роботі [13]. Отримана обчислювальна складність становить  $O(n^2 \log^2 n)$ . Метод пошуку по заданому патерну зображення, який має найменшу відстань в метриці Хаусдорфа, наведено у роботі [14]. При цьому, використовують трансляцію заданого патерну до шуканого зображення. Алгоритм має високу обчислювальну складність. У роботі [15] наведено метод пошуку мінімального зваженого дерева на основі метрики Хаусдорфа для  $d$  – вимірного простору. Задача апроксимації такого дерева розв’язана за поліноміальний час.

Алгоритм обчислення дискретної відстані Фреше для полігональних кривих наведено у роботі [16]. У даному алгоритмі використовують групи перетворення жорстких рухів. Обчислювальна складність становить  $O(m^2 n^2)$ , де  $m$  та  $n$  – кількість відрізків на першій та другій кривій. У статті [17] наведено алгоритм для обчислення відстані Фреше для поверхонь, які представлені простими полігонами. Алгоритм має поліноміальну складність. У роботі [18] автор розробив алгоритм обчислення відстані Фреше між двома кривими, які задані множиною  $m+n$  лінійно апроксимованих відрізків. Обчислювальна складність рівна  $O(m*n)$ . Для замкнутих полігональних кривих у роботі [19] автори отримали обчислювальну складність  $O(m*n)$  для метрики Фреше. У статті [20] авторами наведено алгоритм для обчислення дискретної відстані Фреше з неточно заданими вершинами. Для  $d$  – вимірного простору отримана обчислювальна складність  $O(d*m*n)$ . Алгоритм для обчислення відстані Фреше між неплоскими поверхнями наведено у роботі [21]. Автори досягли поліноміального часу в  $L_\infty$  метриці. У статті [22] авторами розроблено швидкий алгоритм для знаходження подібності полігональних дерев в метриці Фреше. Алгоритм має поліноміальну складність. У роботах [23, 24] знаходження відстані між параметрично заданими кривими проходить за поліноміальний час.

Отже, із аналізу літературних даних видно, що сучасні алгоритми для знаходження відстані Фреше для плоских замкнених кривих мають найменшу обчислювальну складність  $O(m*n)$ . Алгоритми для знаходження відстані Хаусдорфа між областями обчислювально складні. Для не опуклих областей ефективних алгоритмів обчислення відстані Хаусдорфа не існує.

Отже, необхідно розробити метрику для знаходження відстані між не опуклими областями. Для цього використаємо опис області зображення скелетонами [8]. Скелетони – це серединні лінії, які описують довільні області та зменшують розмірність опису області. Отже, скелетони – це графи без циклів, тобто дерева.

Отже, подальшим напрямком дослідження є розробка метрики Фреше між деревами (скелетонами), яка дозволяє знаходити відстані між довільними (опуклими та не опуклими) геометричними об’єктами. Крім цього, на основі розробленої метрики необхідно розробити метод і алгоритми обчислення відстані між не опуклими областями.

### 3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є введення метрики між деревами для знаходження відстані між не опуклими областями сегментованих зображень. Це дасть можливість зменшити обчислювальну складність алгоритмів порівняння не опуклих областей.

Для досягнення мети необхідно розв'язати такі задачі:

- ввести та обґрунтувати метрику Фреше між деревами;
- розробити метод порівняння не опуклих областей зображень на основі метрики Фреше між деревами;
- розробити алгоритми для обчислення відстаней між не опуклими областями;
- провести комп'ютерні експерименти для знаходження відстаней між не опуклими областями.

### 4. Обчислення відстані між не опуклими областями на основі метрики Фреше

#### 4.1. Метрика Фреше між деревами

Дерево – це зв'язний граф без циклів. Дерево називають кореневим, якщо у ньому вибрано точку (корінь) [26]. Розглянемо топологічні дерева в  $R^n(R^2)$ , тобто топологічні вкладення дерев-графів. Отже, топологічне дерево – це трійка  $(T, \alpha, x_0)$ , де  $T \subseteq R^n$ ,  $x_0 \in T$  і існує граф-дерево  $\tilde{T}$  та вкладення  $f: \tilde{T} \rightarrow R^n$ ,  $\alpha(\tilde{T}) = T$ ,  $f(x_0) = x_0$ .

На кожному топологічному дереві  $T$  існує, таким чином, дві метрики. Перша індукована з  $R^n$  (вона позначається через  $d$ ) і друга – індукована з геодезичної метрики в  $\tilde{T}$  відображенням  $\alpha$  – яку позначаємо через  $\rho_T$ . Як знайти  $\rho_T(x, y)$ ? Треба взяти прообрази  $\alpha_{-1}(x)$ ,  $\alpha_{-1}(y)$  в  $\tilde{T}$  та поміряти в графі  $\tilde{T}$  довжину відрізка, що з'єднує ці точки.

Відображення графів називають монотонним, якщо воно монотонне на всіх відрізках, що починаються з коренів.

Тобто, відображення  $f: \tilde{T} \rightarrow S$  є монотонним, якщо  $f(x_0) = y_0$  (корінь в  $S$ ) і при віддаленні  $x$  від  $x_0$  вздовж відрізка (у метриці  $\rho_T$ ) точка  $f(x)$  монотонно віддаляється від  $y_0$  (у метриці  $\rho_S$ ).

Визначимо відстань Фреше між топологічними деревами  $T$  і  $S$ :

$$d_F(T, S) = \inf \left\{ \sup \{ d(f(x), g(x)) \mid x \in R \} \mid f: R \rightarrow T, g: R \rightarrow S \right\}. \quad (1)$$

Приклад відображення дерев приведено на рис. 1.

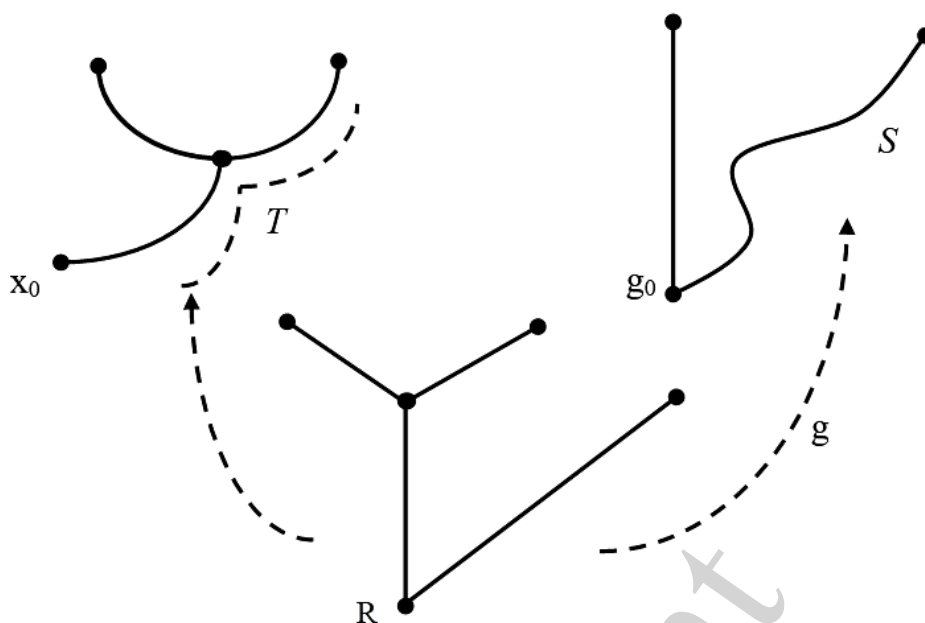


Рис. 1. Відображення дерев:  $R, T, S$  – топологічні дерева

Тоді  $f$  відображає ліву частину  $R$  на  $T$ , а праву – вздовж правої частини  $T$ . відповідно  $g$  відображає праву частину  $R$  на праву частину  $S$ , ліву частину  $R$  на ліву частину  $S$ , складаючи два кінці розвилки.

Розглянемо кореневі дерева на площині  $R^2$ . Якщо  $(T, t_0)$  – таке дерево, то для кожного  $t \in T$  через  $\|t\|$  позначаємо  $d(t, t_0)$ . Тут і далі, через  $d$  позначається геодезійна відстань всередині дерева, тобто  $d(t, t_0)$  означає довжину дуги всередині  $T$ , що з'єднує  $t$  і  $t_0$ .

Відображення корневих дерев.

Вважаємо, що  $f: (S, s_0) \rightarrow (T, t_0)$  має ту властивість, що  $f(s_0) = t_0$ , і для кожного геодезійного сегмента  $J$ , що йде від точки  $t_0$  маємо

$$s, s' \in J, \|s\| \leq \|s'\| \Rightarrow \|f(s)\| \leq \|f(s')\|. \quad (2)$$

Для означення метрики Фреше на множині всіх вкладених дерев в  $R^2$  позначимо через  $\rho$  евклідову метрику в  $R^2$ .

Приймемо

$$D(T, S) = \inf \left\{ \sup \{ \rho(f(r), g(r)) \mid r \in R \} \mid f: R \rightarrow T, g: R \rightarrow S \right\}. \quad (3)$$

Спочатку потрібно перекоонатися у коректності заданого означення. Маючи  $T, S$ , позначимо через  $R$  букет цих двох дерев,  $R = T \vee S$  (тобто фактор-простір об'єднання  $T \cup S$  відносно відношення еквівалентності, що отоотожнює точку  $t_0$  і  $s_0$ ) (рис. 2).

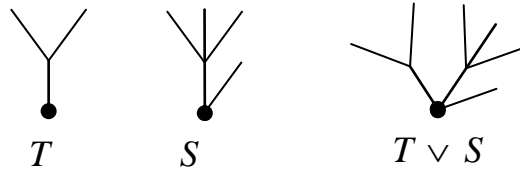


Рис. 2. Букет дерева  $T$  та  $S$

Тоді  $f: R \rightarrow T$  можна взяти відображення, що деформує  $S$  в точку, а  $g: R \rightarrow S$  – відповідно, як відображення, що деформує  $T$  в точку.

**Теорема.** Функція  $D$  є метрика.

*Доведення.*

1) Очевидно, що  $D(T, S) \geq 0$  для кожних  $T, S$ . Очевидно також, що  $D(T, T) = 0$  (для цього досить взяти за  $f$  і  $g$  тотожне відображення).

Нехай тепер  $D(T, S) = 0$ . Звідки нескладно вивести, що  $\rho_H(T, S) = 0$  (через  $\rho_H$  позначимо метрику Хаусдорфа на площині).

Таким чином,  $T = S$ .

2) Симетричність функції  $D$  безпосередньо випливає з означення.

3) Нерівність трикутника.

Нехай,  $T, S, U$  – дерева і  $\varepsilon > 0$ . Існують дерева  $P, R$  і відображення «на»  $f: P \rightarrow T, g: P \rightarrow S$  та  $k: R \rightarrow S, h: R \rightarrow U$  такі, що

$$\sup \{ \rho(f(p), g(p)) \mid p \in P \} \leq D(T, S) + \varepsilon,$$

$$\sup \{ \rho(k(r), h(r)) \mid r \in R \} \leq D(S, U) + \varepsilon.$$

Розглянемо пулбек дерев  $P$  і  $R$  тобто дерево

$$Q = \{ (p, r) \in P \times R \mid g(p) = k(r) \}.$$

Нехай  $\alpha: Q \rightarrow P, \beta: Q \rightarrow R$  – проекції.

Тоді для кожного  $(p, r) \in Q$  маємо (4):

$$\begin{aligned} \rho(f \alpha(p, r), h \beta(p, r)) &= \\ &= \rho(f(p), h(r)) \leq \rho(f(p), g(p)) + \rho(k(r), h(r)) = \\ &= \rho(f(p), g(p)) + \rho(k(r), h(r)) \leq D(T, S) + D(S, U). \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, доведена теорема дає можливість використати метрику Фреше між деревами для знаходження відстані між не опуклими областями.

#### 4. 2. Метод оцінки відстані між скелетонами не опуклих областей

В результаті скелетитонізації отримуємо скелетон  $Sk$  зображення, який є деревом. Отже, скелетон  $Sk=G=(V, E)$  є неорієнтованим графом, де  $V=\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  – множина вершин,  $E=\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$  – множина ребер. Для неорієнтованого графу ребро є множиною  $\{u, v\}$ , де  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ .

Для заданого графу  $G=(V, E)$  дорога (маршрут) довжини  $k$  від вершини  $u$  до вершини  $u'$  є послідовність вершин  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ , таких що  $u=u_0$ ,  $u'=v_k$ ,  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  для  $i=1, 2, \dots, k$ . Шлях включає вершини  $v_0, v_1, \dots, v_k$  і ребра  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ . Якщо є шлях  $P$  від вершини  $u$  до вершини  $u'$  то говорять, що вершина  $u'$  досяжна із вершини  $u$  по шляху  $P$ , тобто  $u \xrightarrow{P} u'$ . Шлях називають простим, якщо всі вершини шляху різні.

Нехай задані два зв'язні планарні графи без циклів (рис. 3).

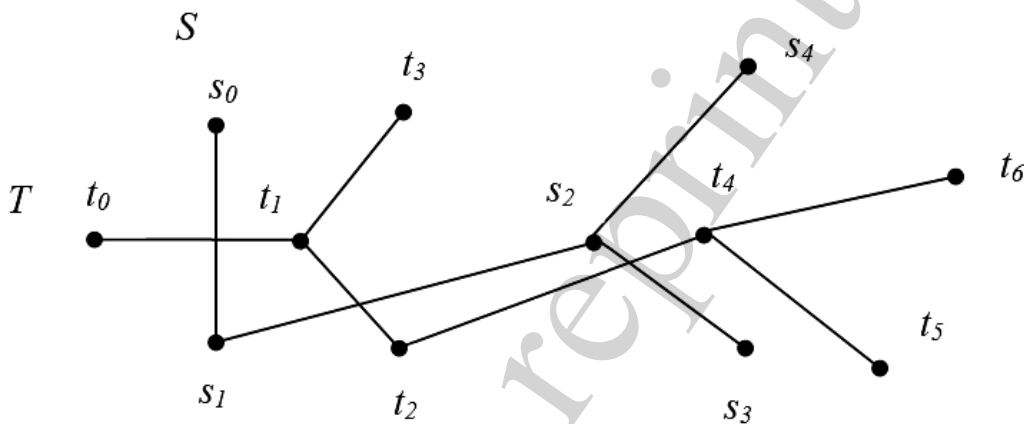


Рис. 3. Планарні графи  $T$  і  $S$

З'єднання графів  $T$  і  $S$  – це множина  $C$  пар  $(t_i, s_j)$ , яка має такі властивості:

- 1)  $(t_0, s_0) \in C$ ;
- 2) якщо  $t_i$  – кінцева вершина в  $T$ , то існує кінцева вершина  $s_j$  в  $S$  така, що  $(t_i, s_j) \in C$ ;
- 3) якщо  $s_k$  – кінцева вершина в  $S$ , то існує кінцева вершина  $t_i$  в  $T$  така, що  $(t_i, s_k) \in C$ ;
- 4) якщо  $(t_i, s_j) \in C$  – пара кінцевих вершин, то на відрізку, що з'єднує  $(t_0, s_0)$  і  $(t_i, s_j)$  множина  $C$  задає з'єднання.

У графу вибрано корінь  $t_0$  і є кінцеві вершини. Якщо взяти ще один такий граф з коренем  $s_0$ , то відстань Фреше між цими графами обчислюється так:

$$D_F(T, S) = \min_C \left( \max_{(t_i, s_j) \in C} D_F([t_0, t_i], [s_0, s_j]) \right). \quad (5)$$

Таким чином, формула (5) для знаходження відстані Фреше дає можливість обчислювати відстані між деревами (скелетонами) та розробити алгоритми для знаходження відстані між не опуклими областями.

#### 4. 3. Алгоритм знаходження відстані між не опуклими областями на основі метрики Хаусдорфа

Нехай задано два невидупклі полігони  $P$  і  $Q$ , отримані після сегментації (рис. 4).

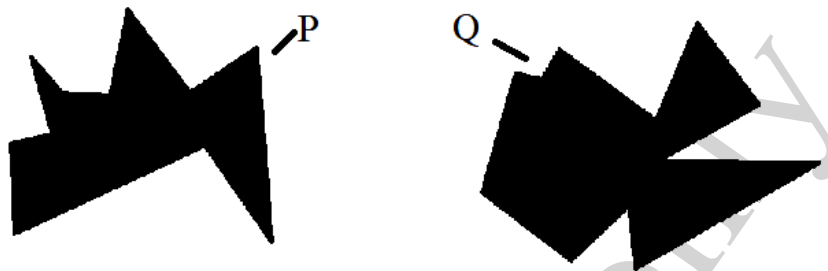


Рис. 4. Полігони  $P$  та  $Q$

Алгоритм обчислення відстані Хаусдорфа між ними такий:

1) Згідно алгоритму [27] розіб'ємо полігони  $P$  і  $Q$  на множини опуклих областей тобто:

$$P = O_{P_1} \cup \dots \cup O_{P_i} \cup \dots \cup O_{P_n},$$

де  $i = \overline{1, n}$  – кількість опуклих областей полігону  $P$ ;

$$Q = O_{Q_1} \cup \dots \cup O_{Q_j} \cup \dots \cup O_{Q_m},$$

де  $j = \overline{1, m}$  – кількість опуклих областей полігону  $Q$ ;

2) Позначимо:

$$O_{P_1} \cup \dots \cup O_{P_i} \cup \dots \cup O_{P_n} = V,$$

$$O_{Q_1} \cup \dots \cup O_{Q_j} \cup \dots \cup O_{Q_m} = W.$$

3) Відстань між полігонами  $P$  і  $Q$  рівна відстані між внутрішніми областями опуклих полігонів  $P_i$  та  $Q_j$  представимо так :

$$d(V, W) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \forall i = \overline{1, n}, \exists j = \overline{1, m} \text{ та } d_H(O_i, O_j) \leq \varepsilon \right\} \quad (6)$$

і навпаки



$$\forall_j = \overline{1, m}, \exists i = \overline{1, n} \text{ та } d_H(O_i, O_j) \leq \varepsilon,$$

де  $d_H$  – відстань Хаусдорфа.

4) Відстань Хаусдорфа знаходимо на основі алгоритму Атталаха [28]. Обчислювальна складність цього алгоритму складає  $O(m, n)$ , де  $m, n$  – кількість вершин полігонів.

#### 4. 4. Алгоритм оцінки відстані між скелетонами не опуклих областей

Дерева графу бувають без виділеного кореня і з виділеним коренем, тобто вільні дерева. Для них справедлива така теорема.

**Теорема** [25]. Нехай  $G=(V, E)$  неорієнтований граф. Тоді справедливо:

1.  $G$  є вільне дерево.
2. Дві будь-які вершини  $G$  з'єднуються за допомогою єдиного простого шляху.
3.  $G$  є зв'язний граф, але при видаленні з  $E$  будь-якого ребра перестає бути таким.
4.  $G$  є зв'язний граф,  $|E| = |V| - 1$ .
5.  $G$  є ациклічний граф,  $|E| = |V| - 1$ .
6.  $G$  – ациклічний граф, але при додаванні будь-якого ребра в  $E$  отримуємо граф, який включає цикл.

Опишемо основні кроки алгоритму:

1. Після скелетонізації двох зображень отримуємо скелетони  $Sk_1=G_1=(V_1, E_1)$  і  $Sk_2=G_2=(V_2, E_2)$  відповідно. Представимо отримані дерева  $G_1=(V_1, E_1)$  і  $G_2=(V_2, E_2)$  за допомогою матриць суміжності  $A_1$  і  $A_2$ . Вершини повинні бути пронумеровані і впорядковані числами  $1, 2, \dots, |V|$ . Тоді матриця суміжності  $A=(a_{ij})$ , розміром  $|V| \times |V|$  така, що

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Матриця суміжності  $A$  для неорієнтованого графу рівна транспонованій матриці  $A^T$ . Тому будемо розглядати тільки елементи матриці, які знаходяться на головній діагоналі і вище, тобто субматрицю  $A^*$ .

2. Формуємо субматриці  $A_1^*$  і  $A_2^*$  на основі матриць інцидентності  $A_1$  і  $A_2$  графів  $G_1$  і  $G_2$ .

3. На їх основі формуємо масиви кінцевих вершин  $M_1=\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$  і  $M_2=\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ .

4. Використовуючи субматриці  $A_1^*$  і  $A_2^*$  та масиви кінцевих вершин  $M_1$  і  $M_2$  знаходимо множини шляхів  $P_1=\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  і  $P_2=\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , кожен з яких є підмножинами  $p_i^1 = \{v_0, v_r, \dots, v_i\}$   $i = \overline{1, k}$ , і  $p_i^2 = \{v_0, v_r, \dots, v_i\}$   $i = \overline{1, r}$ , де  $k$  і  $r$  – кількість кінцевих вершин дерев  $G_1$  і  $G_2$  відповідно.

5. Тоді відстань Фреше обчислимо згідно виразу

$$D_F(P_1, P_2) = \min \left( \max_{(p_i^1, p_j^2) \in C} D_F([p_0^1, p_i^1], [p_0^2, p_j^2]) \right).$$



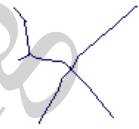
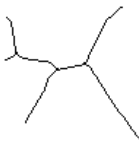



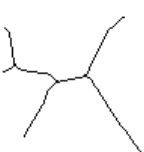


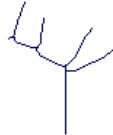



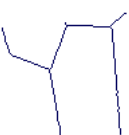
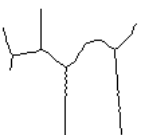


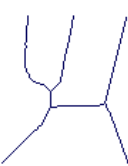
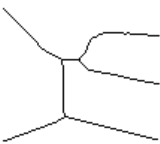


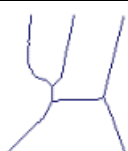

## 6. Комп'ютерні експерименти

Полігони, які досліджені у даній статті, отримані в результаті сегментації гістологічних та цитологічних зображень з бази даних [29]. В результаті скелетонізації полігонів отримано скелетони досліджуваних мікрооб'єктів.

Приклади полігонів та їх скелетонів наведені в табл. 1.

Таблиця 1













Приклади полігонів та їх скелетонів

№ експерименту	Полігон		Скелетон	
	Полігон 1-ої області	Полігон 2-ої області	Скелетон 1-ої області	Скелетон 2-ої області
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Значення відстані Хаусдорфа між полінами наведено у табл. 2.

Таблиця 2


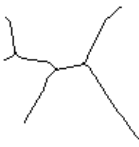

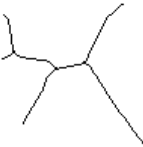
Значення відстані Хаусдорфа між полінами

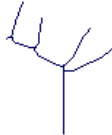


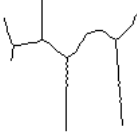
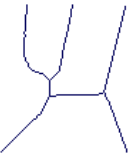
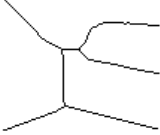
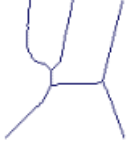

№	Полігон 1-ої області	Полігон 2-ої області	Відстань ХауХаусдорфа, пікселі
1			34.48
2			40.01
3			36.12
4			53.93
5			93.19
6			71.58

Значення відстані Фреше для скелетонів наведено у табл. 3.

Таблиця 3

Значення відстані Фреше для скелетонів

№	Скелетон 1-ої області	Скелетон 2-ої області	Відстань Фреше, пікспікселі
1			34.48
2			41.0

3			36.87
4			54.20
5			94.0
6			72.42

Час знаходження відстані між полігонами та скелетонами наведено на рис. 5.

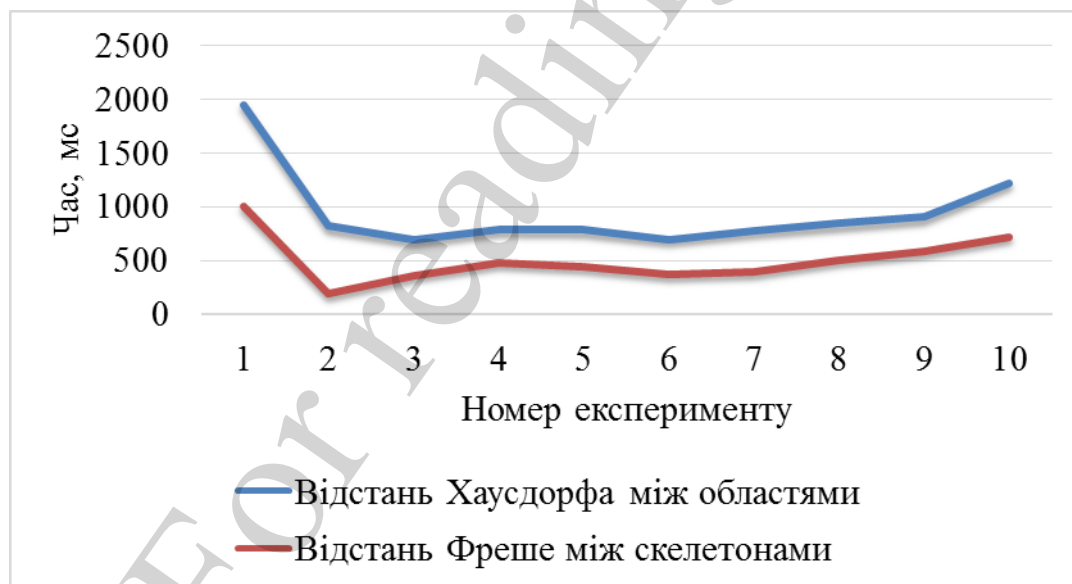


Рис. 5. Час знаходження відстані Хаусдорфа між полігонами та відстані Фреше між скелетонами

Значення відносної похибки відстані Хаусдорфа між полігонами та відстані Фреше між скелетонами наведено на рис. 6.



Рис. 6. Значення відносної похибки відстані Хаусдорфа між полігонами та відстані Фреше між скелетонами

Проведені комп'ютерні експерименти показують, що відхилення значення відстані Хаусдорфа між полігонами та відстані Фреше між скелетонами лежить в межах 2–3 %.

## 7. Обговорення результатів порівняння не опуклих областей зображень на основі метрики Фреше між деревами

Сучасні алгоритми обчислення відстані Хаусдорфа між областями з малою обчислювальною складністю відомі тільки для опуклих областей. Використання метрики Хаусдорфа для обчислення відстаней між не опуклими областями обчислювально складне. При цьому не опуклі області необхідно перетворити у опуклі. Це вимагає додаткових обчислювальних затрат.

Характеристикою будь-якої області є скелетон, який є деревом. Тому знаходження відстані між областями замінюється знаходженням відстані між скелетонами. Запропоновано нову математичну структуру – метрику Фреше між деревами, що дозволило розв'язати задачу обчислення відстаней між не опуклими областями.

Перевагою метрики Фреше між деревами є можливість обчислення відстаней між не опуклими областями. Ця перевага досягається за рахунок заміни обчислення відстаней між областями обчисленням відстаней між скелетонами областей. Розроблені метод і алгоритми мають меншу обчислювальну складність, порівняно із відомими алгоритмами обчислення відстані Хаусдорфа між не опуклими областями. Проведене чисельне моделювання алгоритмів показало, що похибка знаходження відстані на основі метрики Хаусдорфа і на основі метрики Фреше між деревами лежить в межах 2–3 %. Але при цьому суттєво зменшується час знаходження відстаней між областями при використанні метрики Фреше між деревами, порівняно з метрикою Хаусдорфа.

Першим обмеженням використання метрики Фреше між деревами є необхідність знаходження скелетонів областей. Але сучасні алгоритми знаходження

скелетонів мають малу обчислювальну складність. Тому знаходження скелетонів областей не є складною задачею.

Другим обмеженням є необхідність виділення коренів скелетонів. Це обмеження викликане тим, що введена метрика Фреше між деревами справедлива тільки для кореневих дерев. Це обмеження можна усунути шляхом розроблення метрики Фреше між не кореневими деревами. Це не є принциповим обмеженням. Тому подальшими кроками в дослідженні буде розроблення метрики Фреше для не кореневих дерев.

Результати дослідження можна використати не тільки для тестування відомих та нових алгоритмів сегментації, але й для розпізнавання зображень, пошуку зображень у базах даних. Це значно розширює область застосування розробленої метрики.

## **8. Висновки**

1. Було встановлено, що запропонована відстань Фреше між деревами є метрикою. Для цього було доведено аксіоми тотожності, симетрії та трикутника. Метрика Фреше між деревами базується на метриці Фреше і дозволяє знаходити відстані між скелетонами зображень.

2. На основі метрики Фреше між деревами розроблено метод порівняння не опуклих областей зображень. Метод базується на алгоритмі виділення скелетонів зображень і алгоритмі знаходження відстані між скелетонами на основі метрики Фреше між деревами. Завдяки розробленому методу стало можливо знаходити відстані між не опуклими областями.

3. Базуючись на методі порівняння не опуклих областей, розроблено алгоритми обчислення відстані між не опуклими областями. Дані алгоритми мають нижчу обчислювальну складність ніж алгоритми обчислення відстані Хаусдорфа між не опуклими областями.

4. Проведені комп'ютерні експерименти показали, що похибки обчислення відстаней, знайдених алгоритмами на основі метрики Хаусдорфа і на основі метрики Фреше між деревами лежить в межах 2–3 %. При цьому час обчислення відстані Фреше між скелетонами в середньому в 2 рази менший від часу обчислення відстані Хаусдорфа між полігонами.

## **Подяки**

Дана робота виконана в рамках держбюджетної теми «Гібридна інтелектуальна інформаційна технологія діагностування передракових станів молочної залози на основі аналізу зображень». Реєстраційний номер 1016U002500.

## **Література**

1. Медовый, В. С. Роботизированная микроскопия внедряет стандарты качества лабораторных анализов [Текст] / В. С. Медовый // Стандартизация. – 2009. – № 3. – С. 33–37.

2. Медовый, В. С. Разработка и испытание автоматизированного комплекса микроскопии [Текст] / В. С. Медовый, Б. З. Соколинский, В. В. Маркел-

лов, Д. С. Федорова, И. В. Федоров // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 1. – С. 66–73.

3. Медовый, В. С. Современный возможности роботизированной микроскопии в автоматизации анализов и лабораторной телемедицине (аналитический обзор) [Текст] / В. С. Медовый, А. М. Пятницкий, Б. З. Соколинский и др. // Клиническая лабораторная диагностика. – 2012. – № 10. – С. 32–43.

4. Life Science Source [Electronic resource]. – Available at: <https://www.biovision.com>

5. Ценовой лист. Программно-аппаратный комплекс для микроскопии [Электронный ресурс]. – ООО «Научно-производственная компания «Зенит». – Режим доступа: <http://www.zenit-npk.ru/fprice/info/11>

6. Сканирующие микроскопы-анализаторы МЕКОС-Ц2 [Электронный ресурс]. – Сканирующие микроскопы-анализаторы. – Режим доступа: <http://msk.all-gorod.ru/product/4863699-skaniruyushchie-mikroskopy-analizatory-mekos-c2>

7. Szeliski, R. Computer Vision: Algorithms and Applications [Text] / R. Szeliski. – Springer, 2010. – 812 p. doi: 10.1007/978-1-84882-935-0

8. Blum, H. A. Transformation for extracting new descriptors of shape [Text] / H. A. Blum, W. W. Dunn // Models for the Perception of Speech and Visual Form. – 1967. – Issue 5. – P. 362–380.

9. Кольцов, П. П. О количественной оценке эффективности алгоритмов анализа изображений [Текст] / П. П. Кольцов, А. С. Осипов, А. С. Куцаев, А. А. Кравченко, Н. В. Котович, А. В. Захаров // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 542–556. doi: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-542-556

10. Березский, О. Н. Количественная оценка качества сегментации изображений на основе метрик [Текст] / О. Н. Березский, Е. Н. Березская // Управляющие системы и машины. – 2015. – № 6. – С. 59–65.

11. Lopez, M. A. Hausdorff approximation of convex polygons [Text] / M. A. Lopez, S. Reisner // Computational Geometry. – 2005. – Vol. 32, Issue 2. – P. 139–158. doi: 10.1016/j.comgeo.2005.02.002

12. Alt, H. Computing the hausdorff distance between curved objects [Text] / H. Alt, L. Scharf // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2008. – Vol. 18, Issue 04. – P. 307–320. doi: 10.1142/s0218195908002647

13. Chew, L. P. Getting around a lower bound for the minimum Hausdorff distance [Text] / L. P. Chew, K. Kedem // Computational Geometry. – 1998. – Vol. 10, Issue 3. – P. 197–202. doi: 10.1016/s0925-7721(97)00032-1

14. Knauer, C. Approximate nearest neighbor search under translation invariant hausdorff distance [Text] / C. Knauer, M. Scherfenberg // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2011. – Vol. 21, Issue 03. – P. 369–381. doi: 10.1142/s0218195911003706

15. Alvarez, V. Approximating the minimum weight spanning tree of a set of points in the Hausdorff metric [Text] / V. Alvarez, R. Seidel // Computational Geometry. – 2010. – Vol. 43, Issue 2. – P. 94–98. doi: 10.1016/j.comgeo.2009.04.005

16. Mosig, A. Approximately matching polygonal curves with respect to the Fréchet distance [Text] / A. Mosig, M. Clausen // Computational Geometry. – 2005. – Vol. 30, Issue 2. – P. 113–127. doi: 10.1016/j.comgeo.2004.05.004

17. Buchin, K. Computing the Fréchet distance between simple polygons [Text] / K. Buchin, M. Buchin, C. Wenk // Computational Geometry. – 2008. – Vol. 41, Issue 1-2. – P. 2–20. doi: 10.1016/j.comgeo.2007.08.003
18. Rote, G. Computing the Fréchet distance between piecewise smooth curves [Text] / G. Rote // Computational Geometry. – 2007. – Vol. 37, Issue 3. – P. 162–174. doi: 10.1016/j.comgeo.2005.01.004
19. Schlesinger, M. I. Fréchet Similarity of Closed Polygonal Curves [Text] / M. I. Schlesinger, E. V. Vodolazskiy, V. M. Yakovenko // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2016. – Vol. 26, Issue 01. – P. 53–56. doi: 10.1142/s0218195916500035
20. Ahn, H.-K. Computing the discrete fréchet distance with imprecise input [Text] / H.-K. Ahn, C. Knauer, M. Scherfenberg, L. Schlipf, A. Vigneron // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2012. – Vol. 22, Issue 01. – P. 27–44. doi: 10.1142/s0218195912600023
21. Cook, A. F. Computing the Fréchet distance between folded polygons [Text] / A. F. Cook, A. Driemel, J. Sherette, C. Wenk // Computational Geometry. – 2015. – Vol. 50. – P. 1–16. doi: 10.1016/j.comgeo.2015.08.002
22. Gudmundsson, J. Fast algorithms for approximate Fréchet matching queries in geometric trees [Text] / J. Gudmundsson, M. Smid // Computational Geometry. – 2015. – Vol. 48, Issue 6. – P. 479–494. doi: 10.1016/j.comgeo.2015.02.003
23. Alt, H. Computing the fréchet distance between two polygonal curves [Text] / H. Alt, M. Godau // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 1995. – Vol. 05, Issue 01n02. – P. 75–91. doi: 10.1142/s0218195995000064
24. Chambers, E. W. Homotopic Fréchet distance between curves or, walking your dog in the woods in polynomial time [Text] / E. W. Chambers, É. Colin de Verdière, J. Erickson, S. Lazard, F. Lazarus, S. Thite // Computational Geometry. – 2010. – Vol. 43, Issue 3. – P. 295–311. doi: 10.1016/j.comgeo.2009.02.008
25. Berezsky, O. Frechet Metric for Trees [Text] / O. Berezsky // 2016 IEEE First International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP). – Lviv, 2016. – P. 213–217. doi: 10.1109/dsmp.2016.7583543
26. Berezsky, O. Computation of the minimum distance between non-convex polygons for segmentation quality evaluation [Text] / O. Berezsky, O. Pitsun // 2017 12th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT). – Lviv, 2017. – P. 183–186. doi: 10.1109/stc-csit.2017.8098764
27. Atallah, M. J. Computing Some Distance Functions Between Polygons [Text] / M. J. Atallah, C. C. Ribeiro, S. Lifschitz // Computer Science Technical Reports. – 1990. – Vol. 9.
28. Cormen, T. H. Introduction to Algorithms [Text] / T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. – 3-rd ed. – MIT Press, 2009. – 1312 p.
29. Березький, О. М. Розроблення реляційної бази даних інтелектуальної системи автоматизованої мікроскопії [Текст] / О. М. Березький, О. Й. Піцун, О. С. Вербовий, Т. В. Дацко // Науковий вісник НЛТУ України. – 2017. – Т. 27, № 5. – С. 125–129. doi: 10.15421/40270525